ENS LYON (H')

DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Le thème de ce problème est d'étudier certaines propriétés de stabilité ou d'instabilité des équilibres dans un champ de potentiel. On établit en particulier un étonnant résultat d'instabilité en présence de frottements, résultat dû à Kozlov (1981).

Notations

• $\langle .,. \rangle$ désigne le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$ et $|.|$ est la norme euclidienne associée.

• Si $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est différentiable, on note :

$$\text{grad } U(q) = \left(\frac{\partial U}{\partial q_1}(q), \ldots, \frac{\partial U}{\partial q_n}(q) \right) \in \mathbb{R}^n \text{ le vecteur gradient.}$$

Si U est de classe C^2, la matrice $n \times n$ des dérivées partielles secondes est notée :

$$D^2U(q) = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}(q) \right)_{i,\, j = 1, \ldots, n}$$

• Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et si $v : \Omega \to \mathbb{R}^n$ est différentiable, on note $Dv(q)$ sa matrice jacobienne :

$$Dv(q) = \left(\frac{\partial v_i}{\partial q_j}(q) \right)_{i,\, j = 1, \ldots, n}$$

• Si I est un intervalle et $t \to q(t)$ une fonction vectorielle de classe C^1, C^2, ..., on note :

$$\dot{q} = \frac{dq}{dt} \quad , \quad \ddot{q} = \frac{d^2q}{dt^2} \quad \ldots$$

Le même symbole désigne selon le contexte un point de $\mathbb{R}^n$ ou une fonction de t ; cette ambiguïté permet un allègement des notations.

Lemme préliminaire (à utiliser en III.2)

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 à dérivée seconde bornée et admettant pour $t \to +\infty$ une limite finie.

Montrer qu'alors $\dot{f}(t) \to 0$ pour $t \to +\infty$.

Tournez la page S.V.P.

ENS LYON (M') M2

Partie I

Soit $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. On considère l'équation différentielle (vectorielle) du second ordre

$$(*) \qquad \ddot{q} = -\operatorname{grad} U(q) \ , \ q : I \to \mathbb{R}^n$$

où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, et le système d'ordre 1 équivalent

$$(**) \qquad \begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -\operatorname{grad} U(q) \end{cases} \qquad (q, p) : I \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

On définit l'énergie $E : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$(q, p) \mapsto E(q, p) = \frac{1}{2} |p|^2 + U(q)$$

On rappelle dans ce cadre le résultat principal sur les équations différentielles : pour toute condition initiale (q_0, p_0), il existe un intervalle maximal $I \subset \mathbb{R}$ contenant 0 et une unique fonction vectorielle $q_{q_0,p_0} : I \to \mathbb{R}^n$, de classe C^2, solution de (*) et vérifiant

$$q_{q_0,p_0}(0) = q_0 \quad , \quad \dot{q}_{q_0,p_0}(0) = p_0 .$$

I.1 Soit $q : I \to \mathbb{R}^n$ une solution de (*). Montrer que $t \to E(q(t), \dot{q}(t))$ est constante.

I.2 Soit $q : I \to \mathbb{R}^n$ une solution de (*). Soit $t_0 \in I$; on suppose que l'ensemble $\{U(q(t)) \mid t \in I, t \geq t_0\}$ admet un minorant.

a) Montrer que, si $T = \sup I$ est fini, alors $(q(t), \dot{q}(t))$ a une limite dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ pour $t \to T$.
b) En déduire que si q est une solution maximale, I contient $[t_0, +\infty[$.

I.3 On appellera <u>équilibre</u> de (**) tout point $(\bar{q}, \bar{p}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tel que la solution maximale $q_{\bar{q},\bar{p}}$ de (*) soit <u>constante</u>.

a) Montrer que $(\bar{q}, \bar{p})$ est un équilibre si et seulement si

$$\begin{cases} \bar{p} = 0 \\ \operatorname{grad} U(\bar{q}) = 0 \end{cases}$$

Un équilibre $(\bar{q}, 0)$ sera dit <u>stable</u> s'il vérifie :

(ST) Pour tout voisinage V de $(\bar{q}, 0)$ dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, il existe un voisinage W de $(\bar{q}, 0)$ tel que, pour toute condition initiale $(q_0, p_0) \in W$, on ait

$(q_{q_0,p_0}(t), \dot{q}_{q_0,p_0}(t)) \in V$ pour tout $t \geq 0$.

L'équilibre sera dit <u>instable</u> s'il n'est pas stable.

b) On suppose que $\bar{q}$ est un minimum local strict de U, c'est-à-dire qu'il existe $r > 0$ tel que $0 < |q - \bar{q}| < r$ entraîne $U(q) > U(\bar{q})$. Montrer que pour $\varepsilon > 0$, l'ensemble

$$W_\varepsilon = \{(q, p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid |q - \bar{q}| < r^*, E(q, p) < U(\bar{q}) + \varepsilon\}$$

est un voisinage de $(\bar{q}, 0)$ dont le diamètre tend vers 0 avec ε.
En déduire que l'équilibre $(\bar{q}, 0)$ est stable. Donner un exemple de minimum local donnant lieu à un équilibre instable.

I.4 On suppose que $(0, 0)$ est un équilibre et qu'il existe $r > 0$ tel que, pour tout $q \in \mathbb{R}^n$, avec $|q| \leq r$, et pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, on ait $\langle D^2U(q)\xi, \xi\rangle \leq 0$.
Soit q_0 avec $|q_0| \leq r$ et soit $q_{q_0,0} : I \to \mathbb{R}^n$ la solution maximale issue de q_0 avec une vitesse initiale nulle. Montrer que, si $|q_{q_0,0}(t)| \leq r$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+ \cap I$, l'intervalle I contient $\mathbb{R}_+$ et que la fonction $g(t) = U(q_{q_0,0}(t))$ est constante.
En déduire que $(0, 0)$ est un équilibre instable.

I.5 On suppose que $n = 1$, que $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un polynôme avec $U'(0) = 0$. Montrer que $(0, 0)$ est un équilibre stable si et seulement si 0 est un minimum local strict de U.

Partie II

Condition suffisante d'instabilité d'après Chetaev

On considère dans cette partie une fonction $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $U(0) = 0$, grad $U(0) = 0$. On suppose que 0 n'est pas minimum local de U.
Pour $R > 0$, on définit $V_R = \{q \in \mathbb{R}^n \mid U(q) < 0 \text{ et } |q| < R\}$
On fait sur U l'hypothèse suivante :
(H) Il existe $R > 0$ et une fonction $v : V_R \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 vérifiant les conditions suivantes désignées par (H1), (H2) et (H3).

(H1) $\forall q \in V_R$, grad $U(q) \neq 0$

(H2) $\forall q \in V_R$, $\langle v(q), \text{grad } U(q)\rangle \leq 0$

(H3) $\exists c > 0, \forall q \in V_R, \forall \xi \in \mathbb{R}^n : \langle Dv(q)\xi, \xi\rangle \geq c|\xi|^2$.

On se propose de montrer qu'alors l'équilibre $(0, 0)$ est instable.

II.1 Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $\tilde{v}$, défini par $\tilde{v}(q) = v(q) - \lambda$ grad $U(q)$ vérifie :

$$\forall q \in V_R, \forall \xi \in \mathbb{R}^n : \langle D\tilde{v}(q)\xi, \xi\rangle \geq 0.$$

Pour la suite, on choisit un tel λ.

II.2 Soit $\alpha > 0$ et soit $q : I = [0, T[\to \mathbb{R}^n$ une solution de (*) vérifiant :

$$|q(t)| \leq R/2 \quad \text{pour tout } t \in I$$

et $$E(q(0), \dot{q}(0)) \leq -\alpha.$$

Remplacer "r" par "$r/2$"

Tournez la page S.V.P.

On note $g(t) = \langle \tilde{v}(q(t)), \dot{q}(t) \rangle$. Montrer qu'il existe $M, \beta > 0$, ne dépendant que de α (et non de la solution q choisie), tels que, pour tout $t \in I$, on ait :

$$\dot{g}(t) \geq \beta \quad \text{et} \quad |g(t)| \leq M .$$

En déduire que nécessairement $T \leq 2M/\beta$.

II.3 Soit $q : I \to \mathbb{R}^n$ une solution maximale de (*) avec $0 \in I$. Montrer que, si $E(q(0), \dot{q}(0)) < 0$, il existe $t \in I \cap \mathbb{R}_+$ tel que $q(t) \notin V_{R/2}$. Qu'en déduit-on ?

Partie III

Instabilité en présence de frottements d'après Kozlov.

Soit $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 telle que $U(0) = 0$, grad $U(0) = 0$ et que 0 ne soit pas minimum local de U.
Soit $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application C^1 qui vérifie :

(FV_1) $\quad F(q, 0) = 0,$

(FV_2) $\quad \langle F(q, p), p \rangle < 0$ si $(q, p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et $p \neq 0$.

On considère l'équation différentielle

$(***)$ $\quad \ddot{q} = -\text{ grad } U(q) + F(q, \dot{q})$

On suppose enfin que U vérifie l'hypothèse (H1) de la **Partie II** pour un R convenable. On se propose de montrer que (0, 0) est un équilibre instable de (***).

III.1 Si $q : I \to \mathbb{R}^n$ est une solution de (***), montrer que :

$$\frac{d}{dt} E(q(t), \dot{q}(t)) = \langle F(q(t), \dot{q}(t)) , \dot{q}(t) \rangle .$$

(Comme dans la **Partie I**, $E(q, p) = U(q) + \frac{1}{2}|p|^2$).

III.2 Soit $q : I \to \mathbb{R}^n$ une solution maximale de (***) telle que $E_0 = E(q(0), \dot{q}(0)) < 0$ et que, pour tout $t \in I \cap \mathbb{R}_+$, on ait $q(t) \in V_{R/2}$.
(Comme dans la **partie II**, $V_R = \{ q \mid U(q) < 0, |q| < R \}$).

a) Montrer que $I \supset \mathbb{R}_+$. En appliquant le lemme préliminaire, montrer que

$$\dot{E}(t) = \frac{d}{dt} E(q(t), \dot{q}(t)) \to 0 \quad \text{quand } t \to +\infty.$$

b) Montrer que $\dot{q}(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$.

c) Montrer qu'il existe $\delta, T > 0$ tels que, pour tout $t \geq T$, $|\ddot{q}(t)| \geq \delta$.

d) Montrer d'autre part que $\ddot{q}(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$, en utilisant de nouveau le lemme préliminaire.

III.3 Déduire de la contradiction ci-dessus que (0, 0) est un équilibre instable de (***).

ENS LYON (M')

PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Introduction : Le but du problème est de définir et d'étudier certaines k-algèbres associatives non commutatives. Ces algèbres sont appelées algèbres enveloppantes. On étudie le cas des algèbres associées à l'algèbre affine de dimension 2 et à l'algèbre de Heisenberg de dimension 3. Pour ces deux cas, on détermine une base des algèbres enveloppantes associées (questions 8 et 9) : c'est une version du théorème dit de "Poincaré-Birkhoff-Witt". Les questions suivantes sont consacrées à des applications de ces structures non commutatives.

Notations : Nous considérerons des espaces vectoriels sur le corps k (k = $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Une structure d'algèbre sur un tel espace vectoriel sera appelée k-algèbre. Pour tout espace vectoriel E, on notera L(E) la k-algèbre des endomorphismes de E. On notera $M_n(k)$ la k-algèbre des matrices (n,n) à coefficients dans k. Pour tout X et Y dans $M_n(k)$, on définit le commutateur [X,Y] = XY - YX. On note GL(n,k) le groupe des matrices (n,n) inversibles à coefficients dans k.

Partie I

1°. Préliminaires :

1°.a) On notera $\mathcal{F}$ l'algèbre des fonctions de k^2 à valeurs dans k. Soit $k[x,y] \subset \mathcal{F}$ le sous-espace des fonctions du type $(x,y) \to \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}x^iy^j$ où les a_{ij} sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux. k[x,y] est une sous-algèbre de $\mathcal{F}$, appelée algèbre des polynômes à deux indéterminées sur le corps k. Donner une base de k[x,y].

1°.b) Soit $A = [a_{ij}]$ une matrice de $M_n(k)$. On pose $\|A\| = \operatorname{Sup}_{i=1,n}\left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right)$.

Montrer que $A \to \|A\|$ définit une norme sur $M_n(k)$. Montrer que pour A et $B \in M_n(k)$, on a $\|AB\| \le \|A\|\,\|B\|$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on considère la série normalement* convergente de terme général $\frac{t^pA^p}{p!}$ dans $M_n(k)$ et on note $\exp(tA) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^pA^p}{p!}$. Donner une majoration de $\|\exp(tA)\|$.

2°. Soient A et B deux matrices de $M_n(k)$. Calculer $\lim_{t \to 0}\left(\frac{\exp(tA).\exp(tB) - \exp(tB).\exp(tA)}{t^2}\right)$.

En déduire une condition nécessaire pour que exp(tA).exp(tB) = exp(tB).exp(tA) pour tout $t \in \mathbb{R}$. Cette condition est-elle suffisante ?

3°. On note $\mathbb{A}$ le sous-espace de $M_2(\mathbb{R})$ formé des matrices du type $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où x et $y \in \mathbb{R}$. On note G l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme $f(x) = ax + b$ avec $b \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ et $a > 0$. Vérifier que G** est un groupe. Montrer que si A et $B \in \mathbb{A}$, alors $[A, B] \in \mathbb{A}$.

* c'est-à-dire "absolument"

** G muni de la loi "$\circ$"

Tournez la page S.V.P.